Chapitre 8

Limites de fonctions

Sommaire

OBJECTIFS

- ▷ quantifier la notion de limite de fonction
- ▷ connaître et savoir utiliser la caractérisation séquentielle des limites
- ▷ existence de limite par OPA
- ▷ théorème d'existence de limite par comparaison, encadrement
- ▷ limites des fonctions monotones
- ▷ compatibilité du passage à la limite dans une inégalité.

Préliminaires topologiques

L'objet de ce chapitre est de définir la notion fondamentale de limite de fonction. Cette notion sera désormais d'un usage *permanent*. Par exemple, les propriétés de continuité et de dérivabilité d'une fonction, sont des propriétés d'existence de limites.
Dans ce chapitre, nous étudions des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et nous utilisons les notations suivantes :

Vocabulaire topologique

Intérieur et adhérence d'un intervalle

Définition : *Soit I un intervalle strict de $\mathbf{R}$, nous notons*

- *$\bar{I}$ l'intervalle (fermé) obtenu en rajoutant à I ses bornes réelles. $\bar{I}$ est l'**adhérence** de I dans $\mathbf{R}$.*
- *$\overset{\circ}{I}$ l'intervalle (ouvert) obtenu en privant I de ses bornes réelles.$\overset{\circ}{I}$ est appelé l'**intérieur** de I dans $\mathbf{R}$.*

Exemples :

— si $I =]-4,7[$, $\bar{I} = [-4,7]$, $\overset{\circ}{I} = I =]-4,7[$,

— si $I = [-4,7[$, $\bar{I} = [-4,7]$, $\overset{\circ}{I} =]-4,7[$,

— si $I =]-4,+\infty[$, $\bar{I} = [-4,+\infty[$, $\overset{\circ}{I} =]-4,+\infty[$.

Notion de voisinage

Définition : *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ un point de I ou une extrémité, éventuellement infinie de I. On définit les voisinages de a dans I :*

- ▸ *si $a \in \bar{I}$, un **voisinage** de a dans I est l'intersection de I avec un intervalle **ouvert** contenant a.*
- ▸ *si $a = -\infty$, un **voisinage** de a dans I est l'intersection de I avec un intervalle **ouvert** non minoré.*
- ▸ *si $a = +\infty$, un **voisinage** de a dans I est l'intersection de I avec un intervalle **ouvert** non majoré.*

Notation : *dans la suite du cours, on notera abusivement $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ a est élément de I ou une extrémité, éventuellement infinie de I.*

Vocabulaire : *Soit $\mathcal{P}$ une propriété des réels. On dit que $\mathcal{P}$ est vraie au voisinage de a dans I s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I tel que*

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{V},\ \mathcal{P}(x)}$$

I Notions de limites

Nous connaissons *très bien* la notion de limite d'une suite de nombres réels. Une suite u est convergente vers ℓ si u_n est **arbitrairement proche de** ℓ *pourvu que* n soit **suffisamment** grand, *i.e.* **proche de** $+\infty$. Une suite de nombres réels étant une fonction de **N** dans **R**, nous pouvons considérer les notions de limites de fonctions comme une généralisation des limites de suites.

1 Notion de limite finie en un réel $a \in \bar{I}$

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que f* ***a pour limite*** *ℓ* ***au point*** *a si :*

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists \eta > 0),\ (\forall x \in I), \quad (|x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)}$$

Commentaires : en clair, cela signifie que f admet pour limite ℓ au point a si $f(x)$ est **arbitrairement proche** de ℓ, *pourvu* que x soit **suffisamment proche de** a.

Notation : *on note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ cette relation.*

Remarque : on peut définir la notion de limite en a, même si f n'est pas définie au point a.

Exemples :

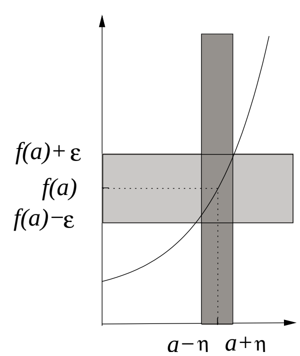
- si f est constante égale à ℓ sur I, alors pour tout $a \in \bar{I}$, f admet ℓ pour limite au point a.
- un exemple à peine plus compliqué. Soit $I = \mathbf{R}$ et $f = id_{\mathbf{R}}$ la fonction *identique* sur **R** définie par $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x$. Alors, pour tout $a \in \mathbf{R}$, f admet a comme limite au point a.
- un exemple basique est donné par la fonction f définie sur $]-1, 1[$ par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x \in]-1, 0[\end{cases}.$$

  Alors, pour tout $a \in [-1, 0[$, f admet 0 comme limite au point a, pour tout $a \in]0, 1]$ f admet 1 comme limite au point a et f ne possède pas de limite au point 0.

Illustration :

La fonction $x \to (1/4)\ (e^x + 2)$ a pour limite $(1/4)\ (e^2 + 2)$ au point $a = 2$.
La bande grisée horizontale correspond à un intervalle de rayon ε centré en $f(a)$.
La bande grisée verticale correspond à un intervalle de rayon η centré au point a.



Exercice : Soit $a \in \mathbf{R}^+$. Montrez que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
Indication : on distinguera deux cas, suivant que a est nul ou pas.

2 Extensions de la notion de limite

2.a Notion de limite finie en $\pm\infty$

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $\ell \in \mathbf{R}$.*

- *Si I admet $+\infty$ comme extrémité, on dit que f* ***admet*** *ℓ* ***pour limite en*** *$+\infty$ si :*

$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists A \in \mathbf{R}),\ (\forall x \in I), \quad (x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

- *Si I admet $-\infty$ comme extrémité, on dit que f* ***admet*** *ℓ* ***pour limite en*** *$-\infty$ si :*

$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists A \in \mathbf{R}),\ (\forall x \in I), \quad (x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

2.b Notion de limite infinie en $a \in \bar{I}$

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in \bar{I}$.*

- *On dit que f* ***admet $+\infty$ comme limite au point*** *a si*

$$(\forall A \in \mathbf{R}),\ (\exists \eta > 0),\ (\forall x \in I),\quad (|x-a| \le \eta \Rightarrow f(x) \ge A).$$

- *On dit que f* ***admet $-\infty$ comme limite au point*** *a si*

$$(\forall A \in \mathbf{R}),\ (\exists \eta > 0),\ (\forall x \in I),\quad (|x-a| \le \eta \Rightarrow f(x) \le A).$$

2.c Notion de limite infinie en $\pm\infty$

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$, i un intervalle non borné.*

- *Si I admet $+\infty$ comme extrémité, on dit que f* ***admet $+\infty$ pour limite en*** *$+\infty$ si :*

$$(\forall A \in \mathbf{R}),\ (\exists B \in \mathbf{R}),\ (\forall x \in I),\quad (x \ge B \Rightarrow f(x) \ge A).$$

- *Si I admet $+\infty$ comme extrémité, on dit que f* ***admet $-\infty$ pour limite en*** *$+\infty$ si :*

$$(\forall A \in \mathbf{R}),\ (\exists B \in \mathbf{R}),\ (\forall x \in I),\quad (x \ge B \Rightarrow f(x) \le A).$$

- *Si I admet $-\infty$ comme extrémité, on dit que f* ***admet $+\infty$ pour limite en*** *$-\infty$ si :*

$$(\forall A \in \mathbf{R}),\ (\exists B \in \mathbf{R}),\ (\forall x \in I),\quad (x \le B \Rightarrow f(x) \ge A).$$

- *Si I admet $-\infty$ comme extrémité, on dit que f* ***admet $-\infty$ pour limite en*** *$-\infty$ si :*

$$(\forall A \in \mathbf{R}),\ (\exists B \in \mathbf{R}),\ (\forall x \in I),\quad (x \le B \Rightarrow f(x) \le A).$$

Exercice : Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x^2$.

1. Montrez que pour tout $a \in \mathbf{R}$, f admet a^2 pour limite au point a.

2. Montrez que f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ et $-\infty$.

Solution $\triangledown$

1. *au voisinage du point a :*

- *si $a = 0$, alors, pour tout $x \in [-1,1]$, $|f(x) - f(a)| = x^2 \le |x|$.*
  Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Posons $\boxed{\eta = \min\{\varepsilon, 1\}}$. Si $x \in [-\eta, \eta]$, alors, d'après le calcul ci-dessus, $|f(x) - f(0)| \le x \le \eta = \varepsilon$. Autrement dit, nous avons prouvé que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |x| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \le \varepsilon.$$

- *si $a \neq 0$, alors, pour tout $x \in [-2a, 2a]$, $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x-a||x+a| \le 3|a|\,|x-a|$.*
  Soit donc $\varepsilon > 0$, posons $\eta = \min\left\{|a|, \dfrac{\varepsilon}{3|a|}\right\}$. Alors pour tout $x \in [a-\eta, a+\eta]$, le calcul ci-dessus montre que

$$|f(x) - f(a)| \quad = \quad |x-a||x+a| \le \eta \times 3|a| \le \varepsilon$$

  Autrement dit, $\forall x \in \mathbf{R},\ |x-a| \le \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$.

2.
- *Au voisinage de $+\infty$:*
  Pour tout $x \ge 1$, $f(x) \ge x$.
  Soit donc $A > 0$ fixé. Posons $B = \max\{A, 1\}$. Alors, pour tout $x \in [B, +\infty[$, $f(x) \ge x \ge A$.
  Ainsi $\forall x \in \mathbf{R},\ x \ge B \Rightarrow f(x) \ge A$.
- *Au voisinage de $-\infty$:*
  Pour tout $x \le -1$, $f(x) \ge |x|$.
  Soit donc $A > 0$ fixé. Posons $B = \min\{-A, -1\}$. Alors, pour tout $x \in]-\infty, B]$, $f(x) \ge |x| \ge A$. Ainsi, $\forall x \in \mathbf{R},\ x \le B \Rightarrow f(x) \ge A$. ▲

2.d Caractérisation topologique de la notion de limite

La notion de voisinage permet de présenter en une seule assertion les différentes notions de limite. N'utilisez pas cette caractérisation pour rédiger vos exercices car elle est *hors-programme*, toutefois, retenez-la car elle permet une synthèse de toutes les autres définitions de la notion de limite...

Proposition.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

f admet ℓ comme limite en a
si et seulement si
pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ dans $\mathbf{R}$ il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de a tel que $f(\mathcal{W}) \subset \mathcal{V}$.

Commentaires : ainsi, avec la notion de voisinage, on peut traduire l'assertion ≪f admet ℓ comme limite en a≫ par ≪$f(x)$ est **arbitrairement** proche (au sens des voisinages) de ℓ pourvu que a soit **suffisamment** proche (au sens des voisinages) de a≫.

3 Unicité de la limite

Comme pour l'étude des suites numériques, l'unicité de la limite, lorsqu'elle existe, est souvent un argument décisif dans les démonstrations.

Théorème 8.1.— Unicité de la limite —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell, \ell' \in \bar{\mathbf{R}}$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ \bullet \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \end{array}\right) \Rightarrow \quad \ell = \ell'}$$

Démonstration ▽
je ne traite ici que des cas ≪tout réel≫. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Comme par hypothèse, f admet ℓ (resp. ℓ') comme limite au point a, je sais qu'il existe $\eta_1 > 0$ (resp. $\eta_2 > 0$) tel que

$$\begin{array}{ll} (\forall x \in I), & (|x-a| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon') \\ (\forall x \in I), & (|x-a| \leq \eta_2 \Rightarrow |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon') \end{array}$$

Soit $\eta_0 = \min\{\eta_1, \eta_2\} \in \mathbf{R}^{+\star}$. Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \leq \eta_0$. En ce cas, l'**inégalité triangulaire** permet d'écrire :

$$|\ell - \ell'| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| \leq 2\varepsilon' = \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, ceci entraîne que $\ell = \ell'$ (cf **Stratégies de démonstration** in **Chapitre 10**). ▲

Notation : *Soit* $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.
Si f *admet* ℓ *comme limite au point* a, *on note* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *ou* $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ *cette relation.*

Définition : *Soit* $f : I \to \mathbf{R}$, *et* $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. *On dit que* f ***possède une limite finie*** *au point* a *s'il existe* $\ell \in \mathbf{R}$ *tel que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

On déduit aisément de la définition que la seule limite possible en un point où f est définie est la valeur de f en ce point.

Corollaire 8.2.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in I$ un élément de I et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$. Alors

$$\boxed{\left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell\right) \Rightarrow \left(\ell = f(a)\right)}$$

Remarque : par contre, il ne suffit pas que f soit définie en a pour qu'elle admette une limite en a.

Vocabulaire : *lorsque* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, *on dit que* f ***est continue en a***.

Nb : la continuité sera étudiée en détail ultérieurement.

4 Limite à gauche et à droite

Définition : *Soit I un intervalle non trivial*[1]*, $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$. On dit que f possède une **limite à gauche (resp. à droite)** en a si la restriction de f à $J = I \cap]-\infty, a[$ (resp. $J = I \cap]a, +\infty[$) possède une limite en a. Lorsqu'elles existent, on note respectivement*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{a^-} f$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{a^+} f$$

Commentaires : dire qu'une fonction admet ℓ comme limite à droite en $a \in \overset{\circ}{I}$ se traduit par :

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists \eta > 0);\ (\forall x \in I) \quad (\ a < x \leq a + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

On utilise souvent ces notions de limite à gauche et à droite pour l'étude d'une fonction définie par des expressions différentes à gauche et à droite de a.

Proposition 8.3.— Théorème des trois paquets —. Soit I un intervalle non trivial, $f : I \to \mathbf{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$ un point *à l'intérieur* de I, $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$. Alors

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) & = & \ell \\ f(a) & = & \ell \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) & = & \ell \end{cases}}$$

En ce cas, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

En pratique : pour étudier l'existence d'une limite en un point $a \in \overset{\circ}{I}$, vous calculez les limites à gauche et à droite au point a et vous vérifiez qu'elles coïncident avec la valeur $f(a)$.

Démonstration $\triangledown$

La condition est suffisante :

Supposons que f possède $f(a)$ pour limite à gauche et à droite.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par hypothèse, il existe deux nombres réels strictement positifs η_g et η_d tels que

$$(\forall x \in I)\ (a - \eta_g \leq x < a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \tag{8.1}$$
$$(\forall x \in I)\ (a < x \leq a + \eta_d) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \quad . \tag{8.2}$$

Posons $\eta = \min\{\eta_g, \eta_d\}$ et considérons un élément x arbitraire de l'intervalle $I \cap [a - \eta, a + \eta]$. Trois cas se présentent :

- si $x < a$, d'après 8.1, $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.
- si $x = a$, $0 = |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.
- si $x > a$, d'après 8.2, $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

Dans tous les cas, $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

La condition est nécessaire :

Supposons que f possède une limite au point a. Comme $a \in \overset{\circ}{I}$, cette limite ne peut être que $f(a)$ ainsi que nous l'avons déjà remarqué. Montrons que f admet $f(a)$ comme limite à gauche au point a.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, par hypothèse, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in I, (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

En particulier si $x \in I \cap]-\infty, a[$ et $|x - a| < \eta$, alors $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ce qui prouve que f admet $f(a)$ comme limite à gauche au point a.

La démonstration pour la limite à droite est parfaitement analogue. ▲

1. *i.e.* $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$

Exemple : cette proposition permet facilement de prouver que la fonction f définie sur $]-1,1[$ par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ 0 & \text{si } x \in]-1,0[\end{cases}.$$

ne possède pas de limite en 0. Il suffit de remarquer que les restrictions de f à $]-1,0[$ et $]0,1[$ sont constantes égales à 1 et 0 respectivement. Par conséquent f admet des limites et à gauche et à droite en 0 :

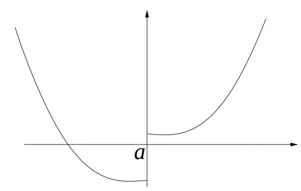
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \ \text{ et } \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Comme $0 \neq 1$, f n'a pas de limite en 0.

Warning : dans cet exemple, la fonction **possède** des limites à gauche et à droite au point $a \in \overset{\circ}{I}$ **différentes** donc elle n'admet pas de limite en a. Mais il se peut aussi que la fonction **ne possède pas de limite à gauche et/ou à droite**.

Illustration :

La fonction représentée ci-contre possède des limites à gauche et à droite au point a. Ces limites sont différentes donc la fonction ne possède pas de limite au point a.



5 Cas d'une fonction définie dans $I \setminus \{a\}$

Les notions de limite à gauche et à droite permettent d'étendre la notion de limite au cas où la fonction f est définie sur $I \setminus \{a\}$, où $a \in \overset{\circ}{I}$:

Définition : *Soit I un intervalle non trivial de $\mathbf{R}$, $a \in \overset{\circ}{I}$, $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$ et $f : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.*
On dit que f a pour limite ℓ au point a si f possède des limites à gauche et à droite en a qui sont toutes deux égales à ℓ. Dans ce cas, on note[2] $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ cette relation.

Corollaire 8.4.— Soit I un intervalle non trivial, $f : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$ un point *à l'intérieur* de I. Alors

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{x\to a^-} f(x) & = & \ell \\ \lim_{x\to a^+} f(x) & = & \ell \end{cases}}$$

En ce cas, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$.

Exemple : $\lim_{x \overset{\neq}{\to} 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

II Propriétés fondamentales

1 Caractérisation séquentielle de la limite

Le théorème qui suit est essentiel à notre approche de la notion de limite car il fait le lien entre les limites des suites et celles d'une fonction :

2. on note parfois $\lim_{x \overset{\neq}{\to} a} f(x) = \ell$ cette relation

Théorème 8.5.— Caractérisation séquentielle de la limite (TCSL)—. Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, et $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$. On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell\right) \iff (\forall u \in I^{\mathbf{N}}), \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell\right)}$$

Commentaires : en clair, pour qu'une fonction f admette ℓ comme limite au point a, *il faut et il suffit* que l'*image* par f de toute suite $u \in I^{\mathbf{N}}$ d'**éléments de** I convergente vers a, soit une suite convergente de limite ℓ.

Démonstration ▽
Je ne rédige que le cas où $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbf{R}$.

- Montrons que *la condition est nécessaire.*
  Supposons que f admette $\ell \in \mathbf{R}$ comme limite au point $a \in \bar{I}$. Soit $u \in I^{\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de I. On suppose de plus que u est convergente de limite a.

  > *Je fais mon brouillon :* Mon but dans la vie[3] est de démontrer que la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite ℓ. C'est-à-dire que $f(u_n)$ *est arbitrairement proche de ℓ, pourvu que n soit suffisamment grand.*
  > Par hypothèse, je sais que pour tout x dans I, $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ, pourvu que x soit suffisamment proche de a. Il me suffit donc que l'élément u_n soit suffisamment proche de a pour garantir que $f(u_n)$ soit aussi proche de ℓ que je le souhaite.
  > Or, précisément, la suite (u_n) d'**éléments de** I est convergente de limite a. Mais cela signifie que si n est suffisamment grand, u_n sera suffisamment proche de a pour que $f(u_n)$ soit aussi proche de ℓ que je le souhaite ☺
  > *Fin du brouillon...*

  Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que :

  $$\forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon. \tag{8.3}$$

  Appliquons alors la définition de la convergence de u vers a avec cet η-là, il en découle l'existence d'un rang n_0 tel que $(\forall n \in \mathbf{N}), \quad \big(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - a| \leq \eta\big)$.
  Soit donc $n \geq n_0$. D'après ce qui précède, $|u_n - a| \leq \eta$. Comme de plus par hypothèse $u_n \in I$, il en résulte par 8.3 que $|f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$.

- Démontrons par contraposée que *la condition est suffisante.*

  $$\text{Supposons donc que } NON\left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell\right),$$

  c'est-à-dire par définition qu'il existe un nombre réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que

  $$(\forall \eta > 0),\ (\exists x \in I),\ (|x-a| \leq \eta) \text{ et } (|f(x) - \ell| > \varepsilon_0) \tag{8.4}$$

  Nous cherchons à présent à prouver l'existence d'une suite u d'éléments de I tels que d'une part (u_n) est convergente de limite a, et $(f(u_n))$ n'est pas convergente de limite ℓ.$^{OK?}$
  Pour ce faire, nous allons utiliser de manière répétée l'assertion universelle (8.4) , en *choisissant* astucieusement η :
  Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ arbitraire, grâce à (8.4), il existe un élément x de I tel que $(|x-a| \leq \frac{1}{n})$ et $(|f(x) - \ell| > \varepsilon_0)$. Comme cet élément x de I dépend du n que je me suis donné, je décide de le baptiser x_n.
  Ainsi, grâce à (8.4), j'ai construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$ d'éléments de I telle que :

  $$(\forall n \in \mathbf{N}^\star) \quad \begin{cases} 1.\ |x_n - a| \leq \frac{1}{n} \\ 2.\ |f(u_n) - \ell| > \varepsilon_0 \end{cases}.$$

  Finalement, le théorème de convergence par comparaison (**Théorème** 7.13) appliqué à la suite u montre , grâce à 1., que la suite u (d'éléments de I) est convergente de limite a. D'autre part, le 2. prouve que la suite $(f(u_n))$ n'est pas convergente de limite ℓ. ▲

Commentaires :

3. pour les 45 secondes qui viennent

■**le sens *prof* :** le **Théorème de la caractérisation séquentielle de la limite** permet de ramener la plupart des démonstrations sur les limites de fonctions en des propriétés sur les suites réelles convergentes que nous avons déjà démontrées. J'utiliserai donc le **TCSL** de façon *industrielle* !

■**le sens *élève* :** concrètement, vous devez savoir utiliser la condition nécessaire du **Théorème** 8.5 dans deux cas :

— Pour démontrer qu'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ n'admet pas ℓ comme limite en $a \in I$, il vous *suffit* d'exhiber une suite $u = (u_n) \in I^{\mathbf{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $(f(u_n))$ est divergente, ou bien elle converge mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \ell$

— Pour démontrer la convergence d'une suite de la forme $u_n = f(x_n)$, où $f : I \to \mathbf{R}$ et $(x_n) \in I^{\mathbf{N}}$. Vous utilisez le :

Corollaire 8.6.— Composition de limites —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $\ell \in \mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ et $(x_n) \in I^{\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de I.

$$\boxed{\textbf{Si} \left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \in I \\ \bullet \quad \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \end{array}\right) \quad \textbf{alors} \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell.}$$

Exercice : Montrez que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^\star$ par $f(x) = \sin(1/x)$ n'a pas de limite en 0.

Solution ▽

Montrons que f n'a pas de limite à droite en 0. Pour ce faire, considérons les suites réelles positives définies par $x_n = [2n\pi]^{-1}$ et $y_n = [\pi/2 + 2n\pi]^{-1}$. Par opérations algébriques sur des suites divergentes vers $+\infty$, on vérifie que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes de limite nulle.

Or, pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $f(x_n) = 0$ tandis que $f(y_n) = 1$. En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 1$$

Montrons par l'absurde que f ne peut avoir de limite lorsque x tend vers 0 :

*Supposons au contraire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell$, alors par le **TCSL**, $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$, ce qui est absurde.* ▲

Remarques :

- bien sûr, la caractérisation séquentielle de la limite s'applique aussi aux limites à gauche et à droite : il suffit d'appliquer le **Théorème** 8.5 aux restrictions de f aux *demi*-intervalles de gauche et de droite.
- **Si** f a une limite en un point a **élément** de I, **nécessairement** $\ell = f(a)$. Par conséquent le **Théorème** 8.5 s'exprime en ce cas de la manière suivante :

Corollaire 8.7.— Caractérisation séquentielle de la continuité (TCSC) —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in I$. On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\left(\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\right) \iff \left(\forall u \in I^{\mathbf{N}}\right), \quad \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)\right)}$$

Exercice : On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbf{R}$, continues en 0, non nulles et telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Soit $f \in \mathscr{E}$.

1. Montrez que $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ f(nx) = n\,f(x)$.

2. On note $a = f(0)$. Montrez que $\forall x \in \mathbf{Q},\ f(x) = a\,x$.

3. Montrez que f est continue sur $\mathbf{R}$.

4. Utilisez la **caractérisation séquentielle de la densité de Q** pour en déduire que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = a\,x$.

2 Limites finies et fonctions localement bornées

Proposition 8.8.— Supposons que $f : I \to \mathbf{R}$ admette une **limite finie** en $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. Alors

$$\boxed{\text{il existe un voisinage } \mathcal{V} \text{ de } a \text{ dans } I \text{ tel que } f|_{\mathcal{V}} \text{ soit bornée.}}$$

En particulier, si $a \in \bar{I}$, $(\exists \eta > 0)$, $(\exists M > 0)$; $(\forall x \in I), (|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \leq M)$.

Vocabulaire : *On dit aussi plus simplement que f* ***est bornée au voisinage de*** *a.*

En pratique : cette proposition est très utile pour établir la bornitude d'une fonction

Exemple : $f(x) = \dfrac{1-48x^2}{3+x\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \dfrac{1}{3}$. En conséquence, $f(x)$ est bornée au voisinage de 0.

Démonstration ▽
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $\ell \in \mathbf{R}$. Supposons que f admette ℓ pour limite au point a.
Prenons $\varepsilon = 1$, par hypothèse, il existe $\eta > 0$ tel que $(\forall x \in I)\,(|x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq 1)$.
Posons $M = 1 + |\ell|$ et fixons $x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I$.
D'après l'**inégalité triangulaire**, il vient : $|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leq 1 + |\ell| = M$. ▲

Cette proposition peut *aussi* être utile pour démontrer qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ ne possède pas de limite finie en a.

Remarque : La réciproque de cette proposition est fausse en général comme le montre le contre-exemple tout simple qui suit :

Exemple : Considérons la fonction $g :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ définie par $\forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = \cos x$. g est clairement bornée sur $\mathbf{R}^{+\star}$, pourtant elle ne possède pas de limite quand x tend vers $+\infty$. En effet, considérons les suites (x_n) et (y_n) définies par $\forall n \in \mathbf{N}^\star$, $x_n = (2n+1)\pi$ et $y_n = 2n\pi$. Les suites (x_n) et (y_n) sont divergentes de limite $+\infty$, mais les suites $(g(x_n))$ et $(g(y_n))$ sont constantes égales respectivement à -1 et 1. En utilisant le **Théorème** 8.5, on en déduit aisément que la fonction g ne peut admettre de limite en $+\infty$.

Exercice : Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. Démontrez que

1. **Si** $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, **alors** f est minorée au voisinage de a.
2. **Si** $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, **alors** f est majorée au voisinage de a.

3 Limites et inégalités

Proposition 8.9.— Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$. On suppose que f et g possèdent des limites au point a.

- **Si** $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$, **alors** $f < g$ dans un voisinage de a.
- **Si** $f \leq g$ au voisinage de a, **alors** $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

Commentaires : par exemple, si $a \in \bar{I}$, les conclusions de cette **Proposition** peuvent être reformulées de la façon suivante :

- **Si** $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$, **alors** $(\exists \eta > 0)\,;\,(\forall x \in I,\, |x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) < g(x)$.
- **Si** $(\exists \eta > 0)\,;\,(\forall x \in I,\, |x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ **alors** $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$.

Remarque : comme pour les suites, ces propriétés sont optimales :

- on ne peut remplacer l'inégalité stricte par une inégalité large dans la première assertion.
- lorsque dans la deuxième assertion, on sait que $f < g$ au voisinage de a, on ne peut pas conclure que $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$.

Démonstration ▽
Notons ℓ et ℓ' les limites au point a de f et g respectivement.

- Soit $\delta = \frac{\ell'-\ell}{3}$. Par hypothèse, $\delta > 0$. D'autre part, puisque $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\ell' = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, il existe par définition $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que

$$\begin{array}{ll} (\forall x \in I), & (|x-a| \leq \eta_1) \Rightarrow |f(x)-\ell| \leq \delta \\ (\forall x \in I), & (|x-a| \leq \eta_2) \Rightarrow |g(x)-\ell'| \leq \delta \end{array}$$

  Soit $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$. Soit $x \in I$, tel que $|x-a| \leq \eta$. D'après l'**inégalité triangulaire**, il vient :

$$\begin{array}{lll} f(x) & \leq & \ell + \delta \\ g(x) & \geq & \ell' - \delta. \end{array}$$

  Par compatibilité de l'ordre, il en résulte que

$$g(x) - f(x) \geq \ell' - \delta - (\ell + \delta) \geq \delta > 0$$

  Ce qui achève la preuve de la première assertion.

- La preuve sera par l'absurde. Supposons *au contraire* qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ *et que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) > \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
  D'après le 1., il existe donc un $\delta > 0$ tel que $f(x) > g(x)$ si $|x-a| \leq \delta$. Prenons[4] $x \in I$ tel que $|x-a| \leq \eta$ et $|x-a| \leq \delta$. Ses images par f et g vérifient :

$$f(x) \leq g(x) \text{ et } f(x) > g(x).$$

  Leading thus a contradiction.

▲

Bien sûr, rien n'empêche d'appliquer cette **Proposition** lorsque f ou g est constante, comme corollaire, nous obtenons :

Corollaire 8.10.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, et $c \in \mathbf{R}$. On suppose que f possède une limite au point a.

- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) < c$, **alors** $f < c$ au voisinage de a.
- **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) > c$, **alors** $f > c$ au voisinage de a.
- **Si** $f \leq c$ au voisinage de a, **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq c$.
- **Si** $f \geq c$ au voisinage de a, **alors** $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq c$.

III Théorèmes d'existence de limites

Grâce au **Théorème** 8.5, nous allons déduire des théorèmes d'existence de limites pour les suites, des théorèmes d'existence de limites pour les fonctions. Les théorèmes de convergence au programme sont de trois types essentiellement : **convergence par opérations algébriques**, **convergence par comparaison**, ou convergence par la **limite monotone**. Nous retrouvons ces trois types dans le cadre de l'étude des limites de fonctions, ainsi que la convergence des suites extraites qui s'exprime dans ce cadre plus général sous la forme d'un changement de variable ou **composition des limites**.

1 Opérations algébriques sur les fonctions possédant une limite

Nous avons rappelé dans le **Chapitre 4**, les différentes opérations permettant de construire de nouvelles fonctions, au premier rang desquelles les opérations algébriques. L'objectif de ce paragraphe est de vérifier la compatibilité de la limite - lorsqu'elle existe- avec ces opérations algébriques. Plus précisément, nous avons :

4. Un tel x existe comme le montre une discussion sur la nature de l'intervalle I

Théorème 8.11.— Existence de limite par opérations algébriques
Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions réelles définies sur I, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell, \ell' \in \bar{\mathbf{R}}$, et $\lambda \in \mathbf{R}^\star$ un nombre réel.

1. **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.
2. **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} (\lambda f(x)) = \lambda\, \ell$.
3. **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$
4. **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \times g(x)) = \ell \times \ell'$.
5. **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{\ell}$
6. **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$
7. **Si** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^-$, **alors** $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$

pourvu que ces opérations aient un sens dans $\bar{\mathbf{R}}$.

Notation : *dans l'énoncé ci-dessus,* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+$ *signifie* $f > 0$ *au voisinage de* a *dans* I *et* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Remarques :

1. nous retrouvons bien sûr les mêmes formes indéterminées que celles apparues lors de l'étude des suites : $\infty - \infty$, $\infty \times 0$, et $\dfrac{\infty}{\infty}$.

2. les propriétés 2 et 3 ci-dessus montrent en particulier que l'ensemble des fonctions admettant 0 comme llimite au point a est stable par combinaison linéaire. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbf{R})$.

Démonstration ▽
Il suffit *via* la caractérisation séquentielle de la limite des fonctions d'utiliser les résultats analogues sur les *opérations algébriques sur les suites convergentes", namely* le **Théorème** 7.30 et le **Théorème** 7.31.
Prenons par exemple le 5.

Qu'est-ce que je veux prouver : que la fonction $1/f$ possède $1/\ell$ comme limite au point a. J'utilise le **Théorème** 8.5 :

Soit (u_n) une suite d'éléments de I qui converge vers a. Je montre que $\big(1/f(u_n)\big)$ est une suite convergente de limite $1/\ell$. Par hypothèse, je sais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, donc grâce au **Théorème** 8.5, il en résulte que la suite $f(u_n)$ est une suite convergente de limite ℓ. Comme $\ell \neq 0$, je déduis finalement du **Théorème** 7.30 que $(\dfrac{1}{f(u_n)})$ est une suite convergente de limite $\dfrac{1}{\ell}$.
Les autres assertions se démontrent en suivant le même schéma de preuve. *Left as an exercise for the reader...* ▲

Exercice : Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = 0$. Que diriez-vous de f ?

2 Changement de variable ou composition des limites

Un autre procédé pour construire des nouvelles fonctions est donné par la composition des applications. Là encore, les choses se passent aussi bien qu'on peut le souhaiter :

Théorème 8.12.— Composition de limites
Soit $y : I \to \mathbf{R}$ et $g : J \to \mathbf{R}$ telles que $y(I) \subset J$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $b \in \bar{J} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell \in \bar{\mathbf{R}}$.

Si $\left.\begin{array}{l} \bullet\ \ y(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ \bullet\ \ g(y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell \end{array}\right)$ **alors** $g \circ y(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

En pratique : vous devez comprendre ce théorème comme un **théorème de changement de variable**.

Cas particuliers :

- Pour étudier la limite en un point réel $a \in \bar{I}$, vous pouvez poser $x(t) = a + t$ et $g(t) = f(a + t)$. On vérifie aisément, en utilisant le théorème ci-dessus que f admet une limite au point a *si et seulement si* g possède une limite en 0. Plus précisément :

$$(\forall \ell \in \bar{\mathbf{R}}), \qquad \left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{t\to 0} g(t) = \ell \right)$$

- Pour étudier la limite de f en $+\infty$, vous pouvez poser $x(t) = \dfrac{1}{t}$ et $g(t) = f(x(t))$. On a alors l'équivalence

$$(\forall \ell \in \bar{\mathbf{R}}), \qquad \left(\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim_{t\to 0^+} g(t) = \ell \right)$$

Exercice : Etudiez la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbf{R}^{+\star}$ par $\forall x > 0,\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$.

Solution ▽

Posons pour tout $x > 0$, $y(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

- *D'après le* **Théorème** *8.11* $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$
- *Ainsi que nous le verrons très bientôt* $\lim_{y\to 0} e^y = 1$

Par conséquent, d'après le **Théorème** *8.12,* $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$. ▲

Démonstration ▽

J'utilise le **Théorème** 8.5 :

Soit u une suite d'éléments de I convergente de limite a, et je montre que $g \circ f(u_n)$ est une suite convergente de limite ℓ. Comme $\lim_{x\to a} f(x) = b$, une première utilisation du **Théorème** 8.5 montre que la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite b. Notons (v_n) cette suite. Vu que $f(I) \subset J$, il est clair que v est une suite d'éléments de J. Comme $\lim_{y\to b} g(y) = \ell$, une deuxième application du **Théorème** 8.5 montre la suite $(g(v_n))$ est convergente de limite ℓ. Rappelons-nous la définition de v, ...

Nous avons démontré que

$$\left(\forall u \in I^{\mathbf{N}}\right), \left(\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} g \circ f(u_n) = \ell \right)$$

On conclut en utilisant le ... **Théorème** 8.5 bien sûr ! ▲

Question : Il y a encore un autre procédé permettant de construire une nouvelle fonction... Il s'agit de l'application réciproque d'une bijection ! nous en reparlerons lorsque nous étudierons les fonctions continues sur un intervalle.

3 Existence de limite par encadrement, comparaison

3.a Limite nulle

Théorème 8.13.— Existence de limite par comparaison (limite nulle)
Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\boxed{\textbf{Si} \quad \left.\begin{array}{l} \bullet\ |f| \le g \quad \text{au } \textit{voisinage} \text{ de } a \\ \bullet\ \lim_{x\to a} g(x) = 0 \end{array}\right), \quad \textbf{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0}$$

Commentaires : Il s'agit d'un analogue du **Théorème** 7.13.

Démonstration ▽

Soit $a \in \bar{I}$ et $u \in I^{\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de I convergente de limite a. Comme $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, il résulte du **Théorème** 8.5 que la suite $\big(g(u_n)\big)$ est convergente de limite nulle. De plus, par hypothèse, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\forall x \in I),\ \left(|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x)| \le g(x)\right).$$

Précisément, comme u est convergente de limite a, il existe nécessairement un entier n_0 tel que :

$$(\forall n \in \mathbf{N})\,(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \eta)\,.$$

Soit $n \geq n_0$, d'après ce qui précède, nous avons l'estimation : $|f(u_n)| \leq g(u_n)$.
Comme $\big(g(u_n)\big)$ est convergente vers 0, la **Proposition** 7.13 permet de conclure que la suite $\big(f(u_n)\big)$ est une suite convergente de limite nulle. Il en résulte (retour du **Théorème** 8.5) que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. ▲

Corollaire 8.14.— Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\textbf{Si}\quad \left.\begin{array}{l} \bullet\ \ f \text{ est bornée au } \textit{voisinage} \text{ de } a \\ \bullet\ \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \end{array}\right),\quad \textbf{alors}\quad \lim_{x\to a}(f\times g)(x) = 0$$

Démonstration ▽
Soit $M \in \mathbf{R}$, et $\mathcal{V}$ un voisinage de a dans I tels que

$$\forall x \in \mathcal{V},\ |f(x)| \leq M$$

Par compatibilité de l'ordre, il en résulte que

$$\forall x \in \mathcal{V},\ \big|(f\times g)(x)\big| \leq M|g(x)| \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Comme $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, le résultat découle du théorème de convergence par comparaison. ▲

Exercice : Etudiez la limite en 0 de $f(x) = x\sin(1/x)$.

3.b Limite finie

Théorème 8.15.— Existence de limite par encadrement (limite finie)
Soit $f, g, h : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbf{R}$.

$$\textbf{Si}\quad \left.\begin{array}{l} \bullet\ \ g \leq f \leq h \quad \text{au } \textit{voisinage} \text{ de } a \\ \bullet\ \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \end{array}\right),\quad \textbf{alors}\quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

Commentaires : l'hypothèse se traduit par l'*existence* d'un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I tel que

$$\forall x \in \mathcal{V},\ g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Démonstration ▽
Soit $a \in \bar{I}$ et $u \in I^{\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de I convergente de limite a. Comme $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$, il résulte du **Théorème** 8.5 que les suites $\big(g(u_n)\big)$ et $\big(h(u_n)\big)$ sont convergentes et de limite ℓ. De plus par hypothèse, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\forall x \in I),\ (|x-a| < \eta \Rightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x))\,. \tag{8.5}$$

Puisque u est convergente de limite a, il existe nécessairement un entier n_0 tel que :

$$(\forall n \in \mathbf{N})\,(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \eta)\,. \tag{8.6}$$

Soit $n \geq n_0$, d'après 8.6 et 8.5, nous avons l'encadrement : $g(u_n) \leq f(u_n) \leq h(u_n)$.
Résumons les propriétés des suites $\big(g(u_n)\big)$, $\big(f(u_n)\big)$ et $\big(h(u_n)\big)$:
Les suites $\big(g(u_n)\big)$ et $\big(h(u_n)\big)$ sont convergentes de limite ℓ et il existe un entier n_0 tel que

$$(\forall n \in \mathbf{N})\,(n \geq n_0 \Rightarrow g(u_n) \leq f(u_n) \leq h(u_n))\,.$$

D'après le théorème de convergence par encadrement pour les suites, $\big(f(u_n)\big)$ est une suite convergente de limite ℓ. On conclut *once again*, en utilisant le **Théorème** 8.5. ▲

Exercice : Montrez que pour tout réel strictement positif $a \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

Solution $\triangledown$

En multipliant et en divisant par l'expression conjuguée, j'obtiens l'estimation :

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}| \quad = \quad \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leq \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

D'après le théorème de convergence par comparaison, j'en déduis que $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. ▲

3.c Limite infinie

Le **Théorème** 8.15 possède évidemment une version *limite infinie* :

Corollaire 8.16.— Existence de limite par comparaison (limite infinie)
Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

- On suppose que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

$$\boxed{\textbf{Si} \quad f \geq g \quad \text{dans un voisinage de } a, \quad \textbf{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$$

- On suppose que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$.

$$\boxed{\textbf{Si} \quad f \leq g \quad \text{dans un voisinage de } a, \quad \textbf{alors} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.}$$

Démonstration $\triangledown$
Je ne traite que le premier ■, le deuxième est laissé à titre d'exercice, pour le lecteur !
■Pour changer un peu, je fais la preuve dans le cas où $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$.
Soit (u_n) une suite d'éléments de I divergente vers $-\infty$. Par hypothèse il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $-\infty$ dans I tel que $\forall x \in \mathcal{V}, f(x) \geq g(x)$, c'est-à-dire par définition de voisinage de $-\infty$ dans I, qu'il existe $B \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall x \in I, x \leq B \Rightarrow f(x) \geq g(x). \tag{8.7}$$

Considérons à présent la suite $\big(g(u_n)\big)$. Comme (u_n) est divergente de limite $-\infty$, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à B (et éléments de I par construction). Par 8.7, il s'ensuit que

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \;\; (n \geq n_0 \Rightarrow f(u_n) \geq g(u_n)) \,.$$

D'après le **Théorème** 8.5, la suite $\big(g(u_n)\big)$ est divergente de limite $+\infty$. Le théorème de comparaison pour les suites divergentes de limite $+\infty$ permet alors de conclure que $\big(f(u_n)\big)$ est divergente de limite $+\infty$. D'après le **Théorème** 8.5, il en résulte que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. ▲

Exercice : Soit $f, g : I \to \mathbf{R}$ et $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.
On suppose que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ et que f est minorée au voisinage de a. Que diriez-vous de $f + g$?

4 Cas des fonctions monotones

Nous avons vu que *si* une fonction f possède une limite finie en a, *alors* f est bornée au voisinage de a. La réciproque est fausse en général[5], comme nous l'avons déjà vu. Il est cependant un cas particulier **très important** dans lequel elle est valide, il s'agit de celui des fonctions monotones !

5. Considérez par exemple la fonction $\sin(1/x)$ en 0 ...

4.a Limites aux bornes de l'intervalle

Théorème 8.17.— Limites aux bornes de l'intervalle
Soit $(a, b) \in \bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une application **monotone**. Alors

- **Si** f est croissante, **alors**

  - f possède une limite dans $\bar{\mathbf{R}}$ en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\limits_{x \in]a,b[} f(x)$
  - f possède une limite dans $\bar{\mathbf{R}}$ en b et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$

- **Si** f est décroissante, **alors**

  - f possède une limite dans $\bar{\mathbf{R}}$ en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$
  - f possède une limite dans $\bar{\mathbf{R}}$ en b et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \inf\limits_{x \in]a,b[} f(x)$

Notation : *dans cet énoncé,* $\sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$ *désigne* $\sup\{f(x);\ x \in]a, b[\}$*, si* f *est majorée et* $+\infty$ *sinon.*

Corollaire.— Soit $(a, b) \in \bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une application **monotone**.

f possède une limite *finie* en a (*resp.* b) *ssi* f est *bornée* au voisinage de a (*resp.* b).

Démonstration $\triangledown$
Les quatre cas ci-dessus se traitent de la même manière, rédigeons par exemple le cas où f est décroissante, et examinons son comportement au voisinage de b.
Notons $Y = \{f(x), x \in I\}$. Par construction, I est non vide, par conséquent, Y est non vide. Nous distinguons deux cas :

1. Si Y n'est pas minorée dans $\mathbf{R}$, alors $\inf_{x \in]a,b[} f(x) = -\infty$. Montrons que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$. Pour cela, donnons-nous $A \in \mathbf{R}$. Comme Y n'est pas minorée dans $\mathbf{R}$, A n'est certainement pas un minorant de Y. Par conséquent, il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f(c) < A$. Notons $\eta = b - c$. Il est clair que $\eta > 0$. D'autre part, soit $x \in]a, b[$ vérifiant $|x - b| \leq \eta$. Alors $c \leq x < b$. Comme f est décroissante, nous obtenons l'inégalité $f(x) \leq f(c)$. Par transitivité de l'ordre, il en résulte que $f(x) \leq A$.

2. Si Y est minorée dans $\mathbf{R}$, alors d'après la **Propriété de la borne inférieure** Y possède une borne inférieure dans $\mathbf{R}$. Notons-la ℓ. Montrons que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$.
   Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors d'après la caractérisation de la borne inférieure, il existe un élément y_0 de Y tel que
   $$\ell \leq y_0 < \ell + \varepsilon.$$
   Par définition de Y, il existe un élément x_0 de I tel que $y_0 = f(x_0)$. Il vérifie donc que $\ell \leq f(x_0) < \ell + \varepsilon$. Posons $\eta = b - x_0$. Soit alors $x \in I$ tel que $|x - b| \leq \eta$, c'est-à-dire $x \in [x_0, b[$. Par monotonie de f, il en résulte que $f(x) \leq f(x_0) < \ell + \varepsilon$. Comme par construction de ℓ, $f(x)$ est supérieur ou égal à ℓ, il vient finalement
   $$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

$\blacktriangle$

4.b Limites à l'intérieur de l'intervalle

Lorsque $a \in \overset{\circ}{I}$, nous pouvons appliquer le **Théorème** 8.17 aux restrictions de f aux intervalles $I \cap] - \infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$, nous obtenons :

Théorème 8.18.— Limites à l'intérieur de l'intervalle
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application **monotone**. Alors en tout point $a \in \overset{\circ}{I}$, f admet des limites *finies* à gauche et à droite. De plus

- **Si** f est croissante, **alors** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
- **Si** f est décroissante, **alors** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

Démonstration ▽
Supposons que f soit décroissante. En particulier, $\forall x \in I \cap]-\infty, a[, \quad f(x) \geq f(a)$.
D'autre part, le **Théorème** 8.17 appliqué à la restriction de f à l'intervalle $I \cap]-\infty, a[$ montre que f possède une limite à gauche au point a. Par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, j'en déduis que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \geq f(a)$.
De même, le **Théorème** 8.17 appliqué à la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$, montre que f admet une limite à droite en a.De plus, l'inégalité $f(x) \leq f(a)$, valide pour tout $x \in I \cap]a, +\infty[$, permet d'en déduire par passage à la limite dans une inégalité que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \leq f(a)$. ▲

Corollaire.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une application **monotone** et $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors

f possède une limite au point a *si et seulement si* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

En ce cas,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

Démonstration ▽
Il suffit d'appliquer le **Théorème** 8.18 et la **Proposition** 8.3. ▲

Exercice : Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ et $g :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

On suppose que f est croissante et que g est décroissante.
Montrez que f est continue en tout point $a \in]0, +\infty[$.

IV Limites des fonctions usuelles

1 Limites des fonctions trigonométriques

Les limites pour les fonctions trigonométriques reposent sur le :

Lemme 8.19.— La fonction sin est *dominée* au voisinage de 0 par la fonction $id_{\mathbf{R}}$, c'est-à-dire

$$\boxed{(\forall x \in \mathbf{R}), \qquad |\sin x| \leq |x|}$$

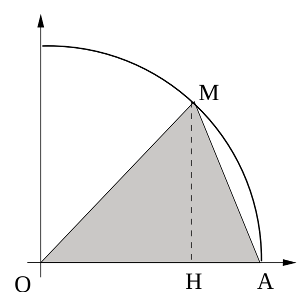
Cette inégalité est très utile en pratique et doit être parfaitement connue.

Démonstration ▽

Les fonctions $|\sin x|$ et $|x|$ étant paires, il suffit de démontrer cette inégalité lorsque $x \in [0, \pi/2]$.
La preuve en images : la démonstration que je donne ici est *géométrique*. Nous allons comparer les aires de deux sous-ensembles du plan :

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ fixé.
On note

— M le point d'affixe e^{ix}
— A le point d'affixe 1,
— H le projeté orthogonal de M sur $\mathbf{R}$
— T le triangle OAM
— S le secteur angulaire délimité par l'arc AM.



L'aire du triangle T est donnée par $\sigma(T) = \frac{1}{2}|MH||OA| = \dfrac{\sin x}{2}$.
L'aire du secteur angulaire S est $\sigma(S) = \frac{1}{2}x|OA|^2 = \dfrac{x}{2}$.
Comme $T \subset S$, il en résulte que $\sin x \leq x$. ▲

Grâce aux règles de calcul pour les fonctions trigonométriques, nous en déduisons :

Théorème 8.20.— Limites des fonctions trigonométriques

1. $\forall a \in \mathbf{R}, \quad \lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$ et $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$

2. $\forall a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a, \ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty.$

Démonstration ▽

1. Par comparaison, il découle immédiatement du **Lemme** précédent que $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

De plus, la formule de duplication pour les cos donne : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\cos x = 1 - 2\big(\sin \dfrac{x}{2}\big)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.
Pour les limites des fonctions cos et sin en tout point $a \in \mathbf{R}$, j'utilise le changement de variable $x = a + t$. Il suffit alors d'utiliser la formule d'addition : $\sin(t + a) = \sin a \cos t + \sin t \cos a$. D'après ce qui précède, $\lim\limits_{t \to 0} \sin t = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0} \cos t = 1$. Par opérations algébriques, j'en déduis que

$$\lim_{t \to 0} \sin(t + a) = \sin a.$$

De même $\cos(t + a) = \cos a \cos t - \sin t \sin a$ Comme $\lim\limits_{t \to 0} \sin t = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0} \cos t = 1$, j'en déduis que

$$\lim_{t \to 0} \cos(t + a) = \cos a.$$

2. En ce qui concerne les limites de la fonction tan, elles résultent aisément des limites des fonctions sin et cos par opérations algébriques. ▲

Exercice : Montrez que

$$\lim_{\substack{\neq \\ x \to 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \lim_{\substack{\neq \\ x \to 0}} \frac{\tan(x)}{x} = 1, \quad \lim_{\substack{\neq \\ x \to 0}} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

2 Limites de la fonction exponentielle

Le **Lemme** qui suit est un *joli* exemple d'application de calcul de limite de fonction monotone :

Lemme 8.21.— $$\lim_{x\to 0} e^x = 1$$

Démonstration ▽

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur **R**, elle possède d'après le **théorème 8.18** des limites à gauche et à droite en 0, notées ℓ^- et ℓ^+ respectivement. Il suffit alors de vérifier que ces limites coïncident.

- Montrons que $\ell^+ \times \ell^- = 1$: pour tout réel strictement positif $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, nous avons $1 = e^0 = e^x \times e^{-x}$.
  Comme $\lim_{x\to 0^+} e^x = \ell^+$ et $\lim_{x\to 0^+} e^{-x} = \ell^-$, j'en déduis par OPA et par unicité de la limite que
  $$1 = \ell^+ \times \ell^-$$
- Montrons que $\ell^+ \in \{0,1\}$: pour tout réel strictement positif $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, nous avons $e^{2x} = e^x \times e^x$
  Comme $\lim_{x\to 0^+} e^x = \ell^+$ et $\lim_{x\to 0^+} e^{2x} = \ell^+$, j'en déduis par OPA et par unicité de la limite que
  $$\ell^+ = \ell^+ \times \ell^+$$
  D'où je tire finalement que $\ell^+ \in \{0,1\}$.

En conclusion, nous avons vérifié, que ℓ^+ et ℓ^- sont inverses l'une de l'autre et que ℓ^+ est 0 ou 1. Par conséquent

$$\ell^+ = \ell^- = 1$$

. ▲

On déduit aisément de ce **Lemme** les limites de la fonction exponentielle en tout point de $\bar{\mathbf{R}}$:

Théorème 8.22.— Limites de la fonction exponentielle

$$\boxed{\mathbf{1}.\ \forall a \in \mathbf{R},\ \lim_{x\to a} \exp(x) = \exp(a) \qquad \mathbf{2}.\ \lim_{x\to -\infty} \exp(x) = 0 \qquad \mathbf{3}.\ \lim_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty}$$

Démonstration ▽

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Posons $x = a + t$ et $g(t) = \exp(a+t)$. Ainsi que nous l'avons vu, exp admet une limite au point a si et seulement si g admet cette même limite en 0. Or

$$\forall t \in \mathbf{R}, e^{a+t} = e^a \times e^t$$

D'après le **Lemme** précédent , $\lim_{t\to 0} e^t = 1$. Par opérations algébriques, il en résulte que $\lim_{t\to 0} \exp(a+t) = \exp a$.

3. Comme la fonction exp est croissante, il suffit d'après le **Théorème** 8.17 de vérifier qu'elle est non majorée. Or, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $e^n \geq n$. Par conséquent, exp est non majorée et $\lim_{x\to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

2. Remarquons que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)}$. Posons pour tout $x \in \mathbf{R}$, $y(x) = -x$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim_{x\to -\infty} y(x) = +\infty \\ \bullet \quad \lim_{y\to +\infty} \exp(y) = +\infty \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} \exp(-x) = +\infty.$$

Par opérations algébriques, il en résulte $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)} \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$.

▲

À partir des limites de la fonction exponentielle, nous en déduisons -par opérations algébriques et composition- les :

Exercice : *Limites de l'exponentielle de base* a —. Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

1.	$\forall \alpha \in \mathbf{R}, \lim_{x\to\alpha} a^x = a^\alpha.$	
2.	**Si** $a \in]1,+\infty[$, **alors** $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$	
3.	**Si** $a \in]0,1[$, **alors** $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$	

Solution $\triangledown$
Il suffit de se rappeler que $a^x = \exp(x \ln a)$.

1. *Le **1.** résulte alors par composition des limites (**Théorème** 8.12) :*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim_{x\to\alpha}(x\ln a) = \alpha \ln a \\ \bullet \quad \lim_{y\to\alpha\ln a} \exp(y) = \exp(\alpha \ln a) \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\alpha} a^x = a^\alpha.$$

Pour les limites aux bornes, nous avons besoin de connaître le signe de $\ln a$, d'où la discussion suivant que $a > 1$ ou $a < 1$.

2. *Si $a > 1$, alors $\ln a > 0$ et par suite :*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim_{x\to-\infty}(x\ln a) = -\infty \\ \bullet \quad \lim_{y\to-\infty} \exp(y) = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} a^x = 0. \qquad \left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim_{x\to+\infty}(x\ln a) = +\infty \\ \bullet \quad \lim_{y\to+\infty} \exp(y) = +\infty \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

3. *Follow the same lines ...*

▲

3 Limites de la fonction logarithme

On déduit aisément des limites de la fonction exponentielle celles du logarithme néperien :

Théorème 8.23.— Limites de la fonction logarithme néperien

1. $\forall a \in \mathbf{R}^{+\star}, \lim_{x\to a} \ln x = \ln a$ **2**. $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ **3**. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Démonstration $\triangledown$

1. Soit $a > 0$. Comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbf{R}^{+\star}$, il suffit de démontrer que les limites à gauche et à droite en a coïncident avec $\ln a$. Montrons par exemple que $\lim_{x\to a+} \ln x = \ln a$. Notons $\ell = \lim_{x\to a+} \ln x$. Nous avons pour tout $x > 0$, $x = \exp \circ \ln x$. D'après le **Théorème** 8.22

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim_{x\to a+} \ln x = \ell \\ \bullet \quad \lim_{y\to\ell} \exp(y) = \exp(\ell) \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to a^+} \exp \circ \ln x = \exp(\ell)$$

D'autre part, comme $\exp \circ \ln x = x$, $\lim_{x\to a^+} \exp \circ \ln x = a$. Par unicité de la limite à droite au point a de la fonction $\exp \circ \ln$, il en résulte que $a = \exp(\ell)$. Par suite, $\ell = \ln a$.

3. Pour démontrer que $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, j'utilise le **Théorème** 8.12. Posons pour tout $x > 0$, $x = e^y$. Comme $\lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$, il résulte du **Théorème** 8.12 que $\lim_{y\to+\infty} \ln \circ \exp(y) = \lim_{x\to+\infty} \ln x$. Or pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\ln \circ \exp(y) = y$. Par conséquent, $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

4. Pour démontrer que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, remarquons que

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+\star}, \ln x = -\ln(1/x)$$

Posons $y(x) = 1/x$, il vient

$$\begin{array}{l} \bullet \quad \lim_{x\to 0^+} y(x) = +\infty \\ \bullet \quad \lim_{y\to+\infty} \ln(y) = +\infty \end{array}$$

Par composition des limites (et OPA), il s'ensuit que $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

▲

Exercice : Montrez que $\lim_{\substack{\neq \\ x\to 1}} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1.$

4 Limites des fonctions puissances

À partir des limites des fonctions exponentielle et logarithme néperien, nous en déduisons par composition les :

Théorème 8.24.— Limites de la fonction puissance α —. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. La fonction $p_\alpha : \mathbf{R}^{+\star} \to \mathbf{R}^{+\star}$ possède des limites en tout point de $\mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

1. $(\forall a \in \mathbf{R}^{+\star})$, $\lim\limits_{x\to a} x^\alpha = a^\alpha$.

2. Si $\alpha > 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

3. Si $\alpha < 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = 0$.

Démonstration $\triangledown$

Recall that $\forall x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

1. Le **1.** résulte alors par composition des limites (**Théorème** 8.12) :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{x\to a}(\alpha \ln x) = \alpha \ln a \\ \bullet \quad \lim\limits_{y\to \alpha \ln a} \exp(y) = \exp(\alpha \ln a) \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to a} x^\alpha = a^\alpha.$$

Pour les limites aux bornes, nous avons besoin de connaître le signe de α, d'où la discussion suivant que $\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$.

2. Si $\alpha > 0$, alors :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{x\to 0}(\alpha \ln x) = -\infty \\ \bullet \quad \lim\limits_{y\to -\infty} \exp(y) = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0. \qquad \left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{x\to +\infty}(\alpha \ln x) = +\infty \\ \bullet \quad \lim\limits_{y\to +\infty} \exp(y) = +\infty \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty.$$

3. Si $\alpha < 0$, alors :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{x\to 0}(\alpha \ln x) = +\infty \\ \bullet \quad \lim\limits_{y\to +\infty} \exp(y) = +\infty \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^\alpha = +\infty, \qquad \left.\begin{array}{l} \bullet \quad \lim\limits_{x\to +\infty}(\alpha \ln x) = -\infty \\ \bullet \quad \lim\limits_{y\to -\infty} \exp(y) = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} x^\alpha = 0.$$

▲

V Extension de la notion de limite aux fonctions à valeurs complexes

Dans cette dernière partie du chapitre, nous nous intéressons aux fonctions $f : I \to \mathbf{C}$ définies sur un intervalle [6] de $\mathbf{R}$ et à valeurs complexes.
Nous avons déjà défini au **Chapitre 4** les parties réelle et imaginaire d'une telle fonction. Il s'agit des fonctions réelles $u : I \to \mathbf{R}$ et $v : I \to \mathbf{R}$ définies par : $\forall x \in I,\ u(x) = \mathfrak{Re}\, f(x)$ et $v(x) = \mathfrak{Im}\, f(x)$, de sorte que

$$\boxed{\forall x \in I, \quad f(x) = u(x) + iv(x)}$$

Toutes les propriétés des limites qui ne font pas appel à la structure d'ensemble ordonné de $\mathbf{R}$, s'appliquent dans ce contexte plus général. En revanche, il n'y a pas par exemple de notion de monotonie pour de telles fonctions.

1 Fonctions bornées

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction à valeurs complexes.f* ***est bornée****, s'il existe $M \in \mathbf{R}^+$ tel que*

$$\forall x \in I,\ \big|f(x)\big| \leq M$$

Commentaires : *lisez* ≪il existe un réel $M \in \mathbf{R}^+$ tel que pour tout $x \in I$ **le module de** $f(x)$ est inférieur à M≫.

Remarque : les notions de fonction majorée ou minorée n'ont aucun sens dans ce contexte.

On peut traduire la bornitude d'une fonction complexe à l'aide de ses parties réelles et imaginaires. Il suffit d'utiliser le **Lemme** 2.12

Lemme.— Pour tout nombre complexe $z = x + iy \in \mathbf{C}$ présenté sous forme algébrique $\max\{|x|, |y|\} \leq |z| \leq |x| + |y|$

Démonstration ▽
D'après l'inégalité triangulaire (pour le module), nous avons d'une part $|z| = |x + iy| \leq |x| + |iy| = |x| + |y|$.
D'autre part, $|z|^2 = x^2 + y^2 \geq \max\{x^2, y^2\} = \max\{|x|, |y|\}^2$. Par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbf{R}^+$, il s'ensuit que $|z| \geq \max\{|x|, |y|\}$. ▲

On obtient alors la caractérisation suivante :

Proposition 8.25.— Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction complexe de parties réelle et imaginaire u et v.

$$\boxed{f \text{ est bornée } \textit{si et seulement si } \ u \text{ et } v \text{ sont bornées.}}$$

2 Notion de limite

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction complexe et $\ell \in \mathbf{C}$ un nombre complexe.*

- *soit $a \in \bar{I}$. f admet ℓ comme limite au point a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si :*

$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists \eta > 0),\ (\forall x \in I), \quad \Big(|x - a)| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.\Big)$$

- *Si I admet $+\infty$ comme extrémité, f* ***admet** ℓ **pour limite en*** *$+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si :*

$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists A \in \mathbf{R}),\ (\forall x \in I), \quad (x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)\,.$$

- *Si I admet $-\infty$ comme extrémité, f* ***admet** ℓ **pour limite en*** *$-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si :*

$$(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists A \in \mathbf{R}),\ (\forall x \in I), \quad (x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)\,.$$

Commentaires : Vous ne révez pas!! les différences entre ces définitions et celles pour les fonctions réelles ne sont pas perceptibles à l'oeil nu!!

6. non trivial

Remarque : en revanche, il n'y a pas de notion de limite infinie pour une fonction à valeur complexe.

Là encore, il est possible de traduire ces notions de limites à l'aide des parties réelle et imaginaire de f.

Proposition 8.26.— Limites des parties réelle et imaginaire
Soit $f : I \to \mathbf{C}$ une fonction complexe de parties réelle et imaginaire u et v, $\ell = \alpha + i\beta$ un nombre complexe présenté sous forme algébrique.

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \textit{si et seulement si} \quad \begin{array}{l} \bullet \ \displaystyle\lim_{x\to a} u(x) = \alpha \\ \bullet \ \displaystyle\lim_{x\to a} v(x) = \beta \end{array}}$$

Démonstration $\triangledown$
Je ne traite que le cas où $a \in \bar{I}$ est réel.
Montrons que la condition est suffisante : supposons que les parties réelles et imaginaire de f ont pour limites respectives, α et β.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé, *once and for all*. Comme par hypothèse, $\lim_{x\to a} u(x) = \alpha$ et $\lim_{x\to a} v(x) = \beta$, il existe $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que

$$\begin{array}{ll} \forall x \in I & |x-a| \le \eta_1 \Rightarrow |u(x)-\alpha| \le \varepsilon/2 \\ \forall x \in I & |x-a| \le \eta_2 \Rightarrow |v(x)-\beta| \le \varepsilon/2 \end{array}$$

Posons $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, et considérons un réel $x \in I$ tel que $|x-a| \le \eta$. Les deux estimations ci-dessus étant valides, il découle alors du **Lemme** 2.12 que

$$\big|f(x) - \ell\big| = \big|\big(u(x) - \alpha\big) + i\big(v(x) - \beta\big)\big| \le \big|u(x) - \alpha\big| + \big|v(x) - \beta\big| \le \varepsilon$$

Réciproquement, montrons que la condition est nécessaire :
Soit $\varepsilon > 0$ fixé, *once and for all*. Comme par hypothèse, $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(\forall x \in I) \quad \big(|x-a| \le \eta \Rightarrow \big|f(x) - \ell\big|\big)$$

Soit $x \in I$ tel que $|x-a| \le \eta$. D'après le **Lemme** 2.12

$$|u(x) - \alpha| \le \max\big\{\big|u(x) - \alpha\big|; \big|v(x) - \beta\big|\big\} \le \big|f(x) - \ell\big| \le \varepsilon \text{ et de même } |v(x) - \beta| \le \big|f(x) - \ell\big| \le \varepsilon$$

▲

Comme f est bornée *si et seulement si* ses parties réelles et imaginaires le sont, nous déduisons du **Théorème** 8.8 le

Corollaire 8.27.— Soit $f : I \to \mathbf{C}$, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbf{C}$.

$$\boxed{\textbf{Si } \lim_{x\to a} f(x) = \ell, \ \textbf{alors} f \text{ est bornée au voisinage de } a}$$

3 Opérations algébriques sur les limites

En passant aux parties réelles et imaginaires, on déduit aisément du **Théorème** 8.11, le

Théorème 8.28.— Opérations algébriques
Soit $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbf{C})$ deux fonctions complexes définies sur I, $a \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $\ell, \ell' \in \mathbf{C}$, et $\lambda \in \mathbf{C}$ un nombre complexe.

1. **Si** $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, **alors** $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.
2. **Si** $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, **alors** $\lim_{x\to a} \bar{f}(x) = \bar{\ell}$.
3. **Si** $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, **alors** $\lim_{x\to a} (\lambda f(x)) = \lambda\, \ell$.
4. **Si** $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$, **alors** $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$
5. **Si** $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$, **alors** $\lim_{x\to a} (f(x) \times g(x)) = \ell \times \ell'$.
6. **Si** $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \neq 0$, **alors** $\lim_{x\to a} \left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = \dfrac{1}{\ell}$