PROGRAMME DE COLLE S05

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

FONCTIONS USUELLES (II)

Fonctions trigonométriques

Vous devez connaître, les propriétés de périodicité, de parité, de symétrie, de dérivabilité, les graphes, les limites et les règles de calcul pour les fonctions sin, cos et tan.

Proposition*.— Résolution d'équations simples

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos(x)=\cos(a) & \iff & x\equiv a[2\pi] \text{ ou } x\equiv -a[2\pi] \\ \sin(x)=\sin(a) & \iff & x\equiv a[2\pi] \text{ ou } x\equiv \pi-a[2\pi]. \\ \tan(x)=\tan(a) & \iff & x\equiv a[\pi] \end{array}}$$

Proposition*.— Factorisation de $a\cos(x)+b\sin(x)=c$ —. Soit $(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$. Il existe $\varphi\in\mathbf{R}$ tel que $\cos(\varphi)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\varphi)=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Par conséquent,

$$\boxed{a\cos(x)+b\sin(x)=c \iff \cos(x-\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Fonctions trigonométriques réciproques

Proposition*.— La fonction restreinte $\sin_|:[-\pi/2;\pi/2]\to[-1;1]$ est une bijection strictement croissante et continue. Son application réciproque $\text{Arcsin}:[-1;1]\to[-\pi/2;\pi/2]$ vérifie, pour tout couple (x,t) de réels

$$\boxed{t\in[-\pi/2;\pi/2] \text{ et } x=\sin(t) \iff x\in[-1,1] \text{ et } t=\text{Arcsin}\,(x)}$$

En pratique : pour montrer que $t=\text{Arcsin}\,(x)$

- vérifier $\sin(t)=x$
- localiser $t\in[-\pi/2,\pi/2]$

Théorème.— Propriétés de Arcsin —. La fonction $\text{Arcsin}:[-1,1]\to[-\pi/2;\pi/2]$ est strictement croissante et impaire. Elle est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus

$$\boxed{\text{pour tout } x\in]-1,1[,\quad \text{Arcsin}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Savoir-faire : tableau de valeurs, tableau de variation et graphe de la fonction

Proposition.— La fonction Arcsin vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout $t\in[-\pi/2;\pi/2]$, $\text{Arcsin}\,(\sin(t))=t$
- Pour tout $x\in[-1,1]$, $\sin\big(\text{Arcsin}\,(x)\big)=x$
- Pour tout $x\in[-1,1]$, $\cos\big(\text{Arcsin}\,(x)\big)=\sqrt{1-x^2}$
- Pour tout $x\in]-1,1[$, $\tan\big(\text{Arcsin}\,(x)\big)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Proposition*.— La fonction restreinte $\cos_|:[0;\pi]\to[-1;1]$ est une bijection strictement décroissante et continue. Son application réciproque $\text{Arccos}:[-1;1]\to[0;\pi]$ vérifie pour tout couple (x,t) de réels

$$\boxed{t\in[0,\pi] \text{ et } x=\cos(t) \iff x\in[-1,1] \text{ et } t=\text{Arccos}\,(x)}$$

En pratique : pour montrer que $t=\text{Arccos}\,(x)$

- vérifier $\cos(t) = x$
- localiser $t \in [0, \pi]$

Théorème.— Propriétés de Arccos —. La fonction Arccos : $[-1,1] \to [0;\pi]$ est strictement décroissante. Elle est continue sur $[-1,1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Savoir-faire : tableau de valeurs, tableau de variations et graphe de la fonction

Proposition.— La fonction Arccos vérifie les propriétés suivantes :
- Pour tout $t \in [0;\pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos(t)) = t$
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos\big(\operatorname{Arccos}(x)\big) = x$
- Pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin\big(\operatorname{Arccos}(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$
- Pour tout $x \in [-1;1] \setminus \{0\}$, $\tan\big(\operatorname{Arccos}(x)\big) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Corollaire.—

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [-1,1], \quad \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}}$$

Proposition*.— La fonction restreinte $\tan_|$ $:]-\pi/2;\pi/2[\to \mathbf{R}$ est une bijection strictement croissante et continue. Son application réciproque Arctan : $\mathbf{R} \to]-\pi/2;\pi/2[$ vérifie pour tout couple (x,t) de réels

$$\boxed{t \in]-\pi/2, \pi/2[\text{ et } x = \tan(t) \iff x \in \mathbf{R} \text{ et } t = \operatorname{Arctan}(x)}$$

En pratique : pour montrer que $t = \operatorname{Arctan}(x)$
- vérifier $\tan(t) = x$
- localiser $t \in]-\pi/2, \pi/2[$

Théorème.— Propriétés de Arctan —. La fonction Arctan : $\mathbf{R} \to]-\pi/2;\pi/2[$ est strictement croissante et impaire. Elle est continue et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. De plus

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Savoir-faire : tableau de valeurs, tableau de variation et graphe de la fonction

Proposition.— La fonction Arctan vérifie les propriétés suivantes :
- Pour tout $t \in]-\pi/2;\pi/2[$, $\operatorname{Arctan}(\tan(t)) = t$
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\tan\big(\operatorname{Arctan}(x)\big) = x$
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos\big(\operatorname{Arctan}(x)\big) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin\big(\operatorname{Arctan}(x)\big) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Proposition.—

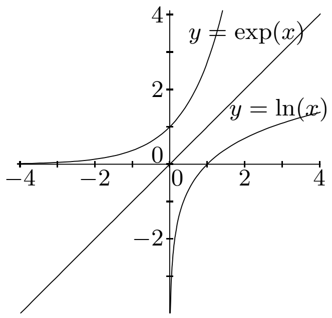
$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet & \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \bullet & \text{pour tout } x \in \mathbf{R}^{-\star}, \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{array}}$$

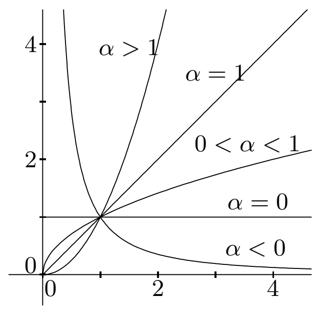
PROGRAMME DE COLLE S05 bis

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

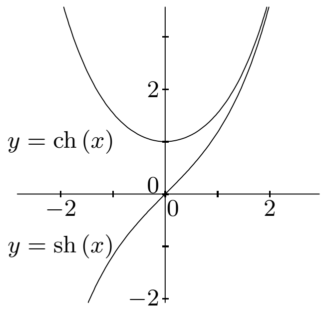
GRAPHES DES PRINCIPALES FONCTIONS USUELLES

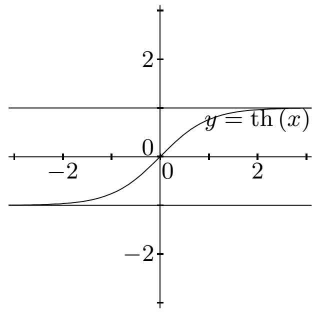
▪▪▪ Fonctions ln, exp et puissances



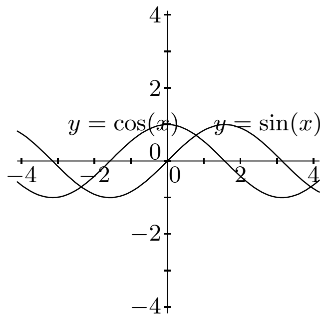


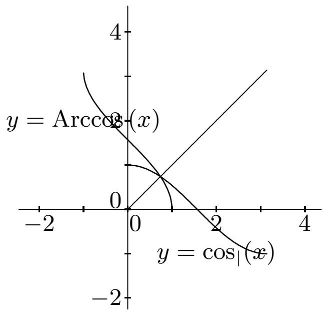
▪▪▪ Fonctions sh, ch, th

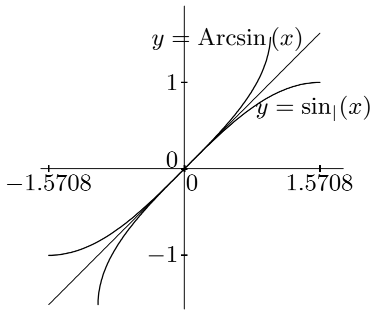




▪▪▪ Fonctions sin, cos, Arcsin, Arccos







▪▪▪ Fonctions tan et Arctan