PROGRAMME DE COLLE S30

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

SÉRIES NUMÉRIQUES

▪▪▪ Généralités

Définition : *Soit* $(u_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $n \in \mathbf{N}$. *On appelle* ***somme partielle*** *de rang* n, *et on note* U_n, *la somme* $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
La ***suite des sommes partielles*** $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est appelée* ***la série de terme général*** u_n. *On la note* $\sum u_n$.

Définition : *La série* $\sum u_n$ *est dite* ***convergente*** *si la suite des sommes partielles* (U_n) *l'est. En ce cas, la limite des sommes partielles est appelée la* ***somme*** *de la série : on note*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Lorsque la suite (U_n) *diverge, on dit que la série est* ***divergente***.

Théorème-Définition*.— Restes d'une série convergente —. Soit $\sum u_n$ une série **convergente**. Étant donné $p \in \mathbf{N}$ **le reste d'ordre** p de la série $\sum u_n$ est défini par $R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$ de sorte que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = U_p + R_p$. De plus, la suite $(R_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est **convergente de limite nulle**.

Théorème*.— Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries numériques et $\lambda \in \mathbf{R}$ un réel.

- Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ converge, alors $\lambda \sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

Théorème.— Condition nécessaire de convergence —. Soit $\sum u_n$ une série numérique.

$$\boxed{\textbf{Si } \sum u_n \text{ converge } \textbf{alors } (u_n) \text{ est convergente de limite nulle}}$$

Vocabulaire : *lorsque* $u_n \not\to 0$, *on dit que la série* $\sum u_n$ ***diverge grossièrement***.

▪▪▪ Séries à termes positifs

Théorème.— Condition nécessaire et suffisante de convergence —. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On note (U_n) la suite des sommes partielles. Alors

$$\boxed{\sum u_n \text{ est convergente } \textit{ si et seulement si } (U_n) \text{ est majorée.}}$$

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_n U_n$.

Lemme.— Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive. Alors pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^\star$

$$\boxed{\int_n^{n+1} f(t)\, dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt}$$

Savoir-faire : interpréter et illustrer cet encadrement comme aire de régions du plan

Théorème.— Comparaison série-intégrale —. Soit $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante et positive. Alors

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ converge } \textit{si et seulement si} \text{ la suite } \left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge}}$$

Théorème.— Comparaison des séries à termes positifs —. Soit u, v des suites positives.
On suppose que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq u_n \leq v_n$.

- si la série $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge aussi et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$
- si la série $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge aussi.

Théorème.— Règles des équivalents — . Soit u, v des suites positives telles que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$.
Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, ie. $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $\sum v_n$ converge.

▪▪▪ Séries absolument convergentes

Définition : *Soit $\sum u_n$ une série. On dit que $\sum u_n$ est* ***absolument convergente*** *si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème.— Condition suffisante de convergence —. Soit $\sum u_n$ une série numérique.

$$\boxed{\textbf{Si } \sum u_n \text{ est absolument convergente } \textbf{alors } \sum u_n \text{ est convergente}}$$

Remarque : dans ce cas, $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \quad \leq \quad \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

▪▪▪ Séries de référence

Théorème.— Convergence des séries géométriques —. Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$\boxed{\text{La série géométrique } \sum x^n \text{ est convergente } \textit{si et seulement si } |x| < 1}$$

En ce cas, elle est absolument convergente.

Corollaire.— Séries géométriques et dérivées —. Soit $x \in]-1, 1[$.

- la série $\sum x^n$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
- la série $\sum nx^{n-1}$ est convergente et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- la série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ est convergente et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Théorème.— Convergence des séries de Riemann —. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ un réel donné.

$$\boxed{\text{La série de Riemann } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \textit{si et seulement si } \alpha > 1}$$

Corollaire*.— Comparaison à une série de Riemann : règle $n^\alpha u_n$ —. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbf{R}^{+\star}$, alors $\sum u_n$ converge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbf{R}^{+\star}$, alors $\sum u_n$ diverge.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.