TECHNIQUES & MÉTHODES S21-S22

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales**; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis!

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ET CALCUL MATRICIEL

■■■ Systèmes d'équations linéaires

Pour résoudre un SEL, je l'échelonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$\boxed{1}$ je repère un coefficient non nul. Par échange de lignes et de colonnes, je le ramène en première position.

$\boxed{2}$ j'élimine x_1 du système formé des $n-1$ dernières équations par opérations élémentaires :

$\boxed{3}$ deux cas se présentent :

- si le système S'' a tous ses coefficients nuls, le système est échelonné.
- sinon, on applique la procédure ci-dessus au système (S'').

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{l} \boxed{a_{1,1}}\, x_1 + \star\ \star\ \star\ \star = b_1 \quad (L_1) \\ \qquad\qquad \boxed{} \quad (S'') \end{array} \right.$$

Pour discuter l'ensemble des solutions d'un SEL échelonné, j'utilise les équations de compatibilité et la notion de rang :

- s'il y a des équations auxiliaires non compatibles le système n'a pas de solutions.
- si le système est compatible, deux cas sont possibles :
  - **le système est de rang maximal** p. Il n'y a pas de variables libres. Le système est équivalent à un système triangulaire à coeff diagonaux non nuls. Par remontée, j'obtiens une unique solution.
  - **le système est de rang strictement inférieur à** p. Il y a $p-r$ variables libres. L'ensemble des solutions est infini et paramétré par ces $p-r$ variables libres. Je les *passe* au second membre et je résous un système triangulaire $r \times r$ à coef diagonaux non nuls par remontée.

Exercice 36 : En discutant suivant la valeur de m, résoudre $(S) \left\{ \begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & +mx_3 & = & 0 \\ x_1 & +mx_2 & +(m-1)x_3 & = & 0 \\ x_1 & +(m+1)x_2 & +m^2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$ *réponse :* $\mathcal{S} = \{(x_3, -x_3, x_3),\ x_3 \in \mathbf{R}\}$ si $m=1$, et $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$ sinon.

■■■ Calcul des puissances dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice. Pour calculer A^p.

- je conjecture une formule en calculant les premières puissances de A, puis je la démontre par récurrence;
- je décompose A sous forme $A = D + N$, où D est diagonale, N nilpotente commutent et j'applique la formule du **binôme de Newton**.
- j'utilise une relation polynomiale : si $P(A) = 0$, je détermine le reste R de la division euclidienne de X^n par P.En ce cas, $A^n = R(A)$.

Exercice 37 : Calculez A^n, pour $n \geq 2$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

réponse : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

■■■ Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice.

- si A est une matrice 2×2, dans ce cas, j'utilisele déterminant
- si je connais un polynôme annulateur de A, la relation polynomiale permet de déterminer l'inversibilité et de calculer l'inverse de A.

Si ces deux méthodes n'ont rien donné, j'utilise au choix

- le **point de vue SEL**,
- l'**algorithme** de Gauss-Jordan.

Nb : le nombre d'opérations élémentaires est exactement le même dans les deux méthodes, mais en pratique, la partie «remontée»est plus rapide du point de vue SEL.

Exercice 38 : Montrez que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculez A^{-1}.

réponse : $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$