PROGRAMME DE COLLE S14 Bis

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

DÉRIVATION$^{(2/2)}$: THÉORÈMES FONDAMENTAUX

▪▪▪ Extremums locaux d'une fonction dérivable

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction numérique et $a \in I$. On dit que f présente un*

- ***maximum local*** *en a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I tel que $\forall x \in \mathcal{V}, \quad f(x) \leq f(a)$.*
- ***minimum local*** *en a s'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a dans I tel que $\forall x \in \mathcal{V}, \quad f(x) \geq f(a)$.*
- ***extremum local*** *en a si elle possède un maximum ou un minimum local en a.*

Théorème.— condition nécessaire d'extrémalité—. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur I, et $a \in \overset{\circ}{I}$ un point **intérieur** à I.

Si f présente un extremum local en a, **alors** $f'(a) = 0$.

▪▪▪ Théorème de Rolle

Théorème.— Théorème de Rolle —. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial[3] $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, **alors** il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique

▪▪▪ Théorèmes des accroissements finis (TAF)

Théorème.— Egalité des accroissements finis (EAF) —. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial[4] $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$.

$$\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Interprétation géométrique

Théorème.— Inégalité des accroissements finis (IAF) —. Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur le segment non trivial $[a, b]$ et dérivable dans $]a, b[$, et $(m, M) \in \mathbf{R}^2$ un couple de réels.

$$\textbf{si } \text{pour tout } x \in]a, b[,\ m \leq f'(x) \leq M, \textbf{ alors } m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M,$$

Savoir-faire : choisir astucieusement a et b pour obtenir une inégalité fonctionnelle.

Corollaire.— IAF —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable dans un intervalle non trivial I. On suppose qu'il existe $k \in \mathbf{R}^+$ un réel positif tel que

$$\forall t \in I, \quad |f'(t)| \leq k$$

Alors

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Définition : *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction, $k \in \mathbf{R}^+$. On dit que f est* ***lipschitzienne de constante*** *k, ou plus simplement k-lipschitzienne sur I si*

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$$

4. *i.e.* $a < b$

▪▪▪ Caractérisations des fonctions monotones dérivables

Théorème.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial I.

- f est constante sur I *si et seulement si* $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.
- f est croissante sur I *si et seulement si* $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I *si et seulement si* $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.

Corollaire.— Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle non trivial I.

- f est strictement croissante sur I *ssi* $f' \geq 0$ et f' n'est nulle sur aucun sous-intervalle non trivial de I.
- f est strictement décroissante sur I *ssi* $f' \leq 0$ et f' n'est nulle sur aucun sous-intervalle non trivial de I.

▪▪▪ Prolongement de fonctions dérivables

Théorème*.— Limite de la dérivée —. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur I, dérivable dans $I \setminus \{a\}$ et $\ell \in \mathbf{R}$.

- **si** $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x) = \ell \in \mathbf{R}$, **alors** f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x) = \ell$.
- **si** $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} f'(x) = \pm\infty$, **alors** f n'est pas dérivable en a et $\lim\limits_{x \overset{\neq}{\to} a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$.

Théorème*.— Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ —. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ dans $I \setminus \{a\}$. On suppose que f ainsi que ses dérivées successives jusqu'à la n ième possèdent des limites finies au point a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \lim_{x \overset{\neq}{\to} a} f^{(k)}(x) = \ell_k \in \mathbf{R}$$

Alors f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ dans I (notée encore f) et telle que

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad f^{(k)}(a) = \lim_{x \overset{\neq}{\to} a} f^{(k)}(x)}$$