PROGRAMME DE COLLE S09

NB : **seules** les démonstrations des théorèmes, propositions étoilées ne sont pas exigées.

ENSEMBLES ORDONNÉS, PROPRIÉTÉS DE R

▪▪▪ Ensembles ordonnés, rappels

Définition : *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire de E. On dit que $\mathscr{R}$ est :*

- **réflexive** *lorsque* $\forall x \in E, \quad x\mathscr{R}x$.
- **symétrique** *lorsque* $\forall (x,y) \in E \times E, \quad (x\mathscr{R}y) \Rightarrow (y\mathscr{R}x)$.
- **antisymétrique** *lorsque* $\forall (x,y) \in E^2, \quad (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x) \Rightarrow (x = y)$.
- **transitive** *lorsque* $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z) \Rightarrow (x\mathscr{R}z)$.

Un ensemble ordonné est un couple $(E, \preceq)$ où $\preceq$ est une relation d'ordre sur E, c'est-à-dire une relation réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition : *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.*

- *Deux éléments x, y de E sont dits **comparables** si $(x \preceq y)$ ou $(y \preceq x)$.*
- *Lorsque tous les éléments de E sont comparables deux à deux, on dit que est un ensemble **totalement ordonné**. Dans le cas contraire, on dit que $(E, \preceq)$ est **partiellement ordonné**.*

▪▪▪ Structure d'ensemble ordonné de R

Théorème*.— Soit x et y deux nombres réels. On suppose que $x < y$. Alors

$$\bullet \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad x + t < y + t, \qquad \bullet \quad \forall t \in \mathbf{R}^{+\star}, \quad x \times t < y \times t$$

Théorème*.— Inégalités triangulaires

- $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad |x + y| \leq |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si $xy \geq 0$.
- $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad |x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$ avec égalité si et seulement si $xy \geq 0$.

Savoir-faire : utiliser les inégalités triangulaires pour majorer ou minorer la valeur absolue d'une somme.

▪▪▪ Éléments remarquables de $(\mathbf{R}, \leq)$

Définition : *Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ une partie de $\mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$.*

- *x est un **majorant** de A* *si* $\forall a \in A, \quad a \leq x$
- *x est un **minorant** de A* *si* $\forall a \in A, \quad a \geq x$

- *x est un **plus grand élément** de A* *si* *x est un élément et majorant de A*
- *x est un **plus petit élément** de A* *si* *x est un élément et minorant de A*

Vocabulaire : *On dit que A est une **partie majorée** (resp. **minorée**) de $\mathbf{R}$ s'il existe un majorant (resp. minorant) de A.*

Notation : *L'ensemble des majorants (resp des minorants) de A est noté $\mathsf{Maj}(A)$ (resp. $\mathsf{Min}(A)$).*

Proposition.— Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, et $A \in \mathscr{P}(E)$.

Si A admet un plus grand élément (*resp.* plus petit élément), alors il est unique. On le note $\max(A)$ (*resp.* $\min(A)$).

Définition : Borne supérieure et borne inférieure d'une partie —.*Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$ une partie de $\mathbf{R}$.*

- *S'il existe, **le plus petit majorant** M de A est appelé la **borne supérieure** de A.*
- *S'il existe, **le plus grand minorant** m de A est appelé la **borne inférieure** de A.*

On note

$$\bullet \quad M = \sup A = \min \mathsf{Maj}_{\mathbf{R}}(A) \qquad \bullet \quad m = \inf A = \max \mathsf{Min}_{\mathbf{R}}(A).$$

■■■ Propriétés de la borne supérieure, inférieure

Théorème*.— Propriété de la borne supérieure/inférieure (PBS/PBI)

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ possède une borne supérieure
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$ possède une borne inférieure

Théorème*.— Caractérisation de la borne supérieure/inférieure (CBBS/CBI)

- Soit $A \subset \mathbf{R}$ une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$, alors

$$\boxed{(\forall \alpha \in \mathbf{R}) \qquad \alpha = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet \quad \forall a \in A,\ \alpha \geq a \\ \bullet \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A;\ \alpha - \varepsilon < a \leq \alpha \end{cases}}$$

- Soit $A \subset \mathbf{R}$ une partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$, alors

$$\boxed{(\forall \alpha \in \mathbf{R}) \qquad \alpha = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \bullet \quad \forall a \in A,\ \alpha \leq a \\ \bullet \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A;\ \alpha \leq a < \alpha + \varepsilon \end{cases}}$$

Savoir-faire : mettre en œuvre la propriété de la borne supérieure : obtenir une majoration de $\sup A$ par "*passage au sup*", puis obtenir la valeur de cette borne à l'aide de la CBS

Remarque : si A admet un plus grand élément α alors α est la borne supérieure de A.

■■■ Conséquences de la propriété de la borne supérieure

Théorème.— Les parties convexes de R sont les intervalles—. Soit $I \subset \mathbf{R}$ une partie de $\mathbf{R}$.

$$\boxed{I \text{ est un intervalle} \iff (\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2)\big((a,b) \in I^2 \Rightarrow [a,b] \subset I\big)}$$

Vocabulaire : *Une partie C de $\mathbf{R}$ est dite **convexe** si* $(\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2)\big((a,b) \in C^2 \Rightarrow [a,b] \subset C\big)$.

Théorème.— R a la propriété d'Archimède —.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \forall a \in \mathbf{R},\ \exists n \in \mathbf{N},\ n\varepsilon > a}$$

Proposition.— Partie entière d'un réel —. Soit $x \in \mathbf{R}$. Il existe un entier relatif $n \in \mathbf{Z}$, unique, tel que $n \leq x < n+1$. n est la **partie entière** de x, on le note $\lfloor x \rfloor$.

Savoir-faire : les propriétés de la fonction partie entière ont été établies au **Chapitre 1**, on pourra revoir avec profit le **Programme S01**.

Définition : *Soit $x \in \mathbf{R}$. On définit pour $n \in \mathbf{N}$ les nombres décimaux* $p_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ *et* $q_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} + 10^{-n}$.
*Les nombres p_n et q_n sont appelés les **approximations décimales** de x par défaut et par excès à 10^{-n} près.*

Proposition.— Densité des rationnels et des irrationnels —.
Soit $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x < y$.

- Il existe un nombre rationnel r dans l'intervalle ouvert $]x,y[$.
- Il existe un nombre irrationnel ξ dans l'intervalle ouvert $]x,y[$.

Théorème*.— Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un réel positif —.
Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. Pour tout réel positif $a \in \mathbf{R}^+$, il existe $b \in \mathbf{R}^+$, unique tel que :

$$b^n = a. \tag{1}$$

Cet élément b est noté $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$ et est appelé la **racine $n^{\text{ième}}$** de a.